

Solução da equação de Fokker-Planck dependente da energia através do método espectral e LTPn

Cíntia Ourique Monticelli

Mestre em Matemática Aplicada e doutoranda em Engenharia Mecânica. Professora do Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas do Centro Universitário Feevale. (cintiam@feevale.br)

Resumo

Neste trabalho, é apresentada uma solução analítica da Equação de Fokker-Planck dependente da energia através da combinação entre o Método Espectral e a Transformada de Laplace (LTP_N), sendo que o Método Espectral é aplicado na variável de energia e o LTP_N no fluxo angular em Série de Fourier. Apresenta-se a simulação numérica (teste) para verificar o bom comportamento da solução encontrada. Faz-se duas propostas de continuidade do trabalho: a implementação computacional e simulação numérica da solução para altos graus de quadratura ou o estudo da convergência.

Palavras-chave

Método espectral, equação de Fokker-Planck, método dos harmônicos esféricos, LTPn, implantação iônica.

Abstract

In this work, is presented a Fokker-Planck analytical solution combining the Spectral Method and the Laplace Transform (LTP_N), being the spectral method applied in the energy variable and the LTP_N in the angular flux in Fourier series. A numerical simulation are reported to determine a good behaviour of the found solution. Two proposts of work are presents: the implementation and simulation to high degrees of quadrature, or the convergence's study.

Key words

Spectral method, Fokker-Planck equation, LTPn, ionic implantation.

Introdução

Quase todo sistema físico está sujeito a complexas influências internas e externas que não são completamente conhecidas e que são freqüentemente chamadas de perturbações ou flutuações. A equação de Fokker-Planck gera, devido a estas flutuações, sistemas que derivam de inúmeros minúsculos distúrbios, os quais mudam as variáveis do sistema imprevisivelmente. A equação de Fokker-Planck foi primeiro aplicada a problemas com movimento Browniano, em que o sistema é pequeno, mas as partículas macroscópicas imersas no fluido se movimentam de um modo que as posições das partículas flutuantes são imprevisíveis. Devido a estas flutuações não se sabe exatamente suas posições, mas existe uma probabilidade de se encontrar a partícula em uma dada região. Com a equação de Fokker-Planck tal densidade de probabilidade pode ser determinada (Risken, 1996).

Aplica-se a equação de Fokker-Planck em um extenso número de campos da física-matemática que envolvem perturbação, como: óptica quântica, físico-química, biologia teórica, teoria de circuitos elétricos, difusão em potenciais periódicos, entre outros problemas, os quais podem ser encontrados nos trabalhos de Risken, 1996, Soize, 1994, Wio, 1994.

A equação de Fokker-Planck aparece de várias formas na literatura: com dependência do tempo e da posição com um infinito número de termos chamada de expansão de Kramers-Moyal; como as equações de Kramers ou Klein-Kramers, em uma ou mais dimensões, que são equações do movimento para as funções de distribuição dependente da posição e da velocidade, descrevendo o movimento Browniano das partículas em um campo externo (Risken, 1996); com dependência da energia e da posição como apresentado por Komarov, 1997, e Mozolewski, 1997 a qual é usada neste trabalho.

A equação de Fokker-Planck também é aplicada em problemas que envolvem implantação iônica, mas os trabalhos nesta área são mais escassos. Pode-se citar os trabalhos de Mozolewski, 2000; Komarov, 1997 e Lima, 1999. A técnica de implantação de íons em meios de alta energia é importante na criação de estruturas semicondutoras. A produção destes dispositivos microeletrônicos requer o conhecimento dos resultados do alcance dos íons (íon range) e da distribuição de energia depositada com um alto grau de precisão (Komarov, 1997; Biersack, 1988).

Os métodos de solução da equação de Fokker-Planck apresentados na literatura são aplicações de diferenças-finitas e técnicas clássicas de simulação numérica como Método de Monte Carlo (Ziegler, 1985). Uma vez que os problemas que são envolvidos são sistemas dinâmicos estocásticos (Soize, 1994). Mas estas técnicas de simulação estatística, no caso de meios com alta energia, requerem um grande esforço computacional.

As transformadas integrais que constituem um método espectral são operadores, definidos em domínios limitados e não limitados, amplamente empregados na busca de soluções analíticas ou semi-analíticas de modelos de engenharia e física, descritos por equações diferenciais, integrais, integro-diferenciais e de diferenças, entre outras aplicações. A principal vantagem desta técnica consiste na redução do número de variáveis independentes destas equações ou simplificações das citadas equações em uma equação algébrica. Entre as transformadas em domínios não limitados, destacam-se as transformadas de Fourier, Mellin, Hankel e de Laplace (esta usada neste trabalho), as quais existe uma vasta literatura sobre o tema (Altimirov, 1993; Debnath, 1995).

A aplicação da transformada integral em domínio limitado foi denominada de Transformada Integral Generalizada (GITT). E as principais etapas deste método são: elaboração do par de transformadas pela solução do problema de Sturm-Liouville; aplicação da transformada, solução do sistema de equações diferenciais ordinárias resultantes e aplicação da transformada inversa. Tal técnica (GITT) tem sido muito utilizada para resolver problemas de transferência de calor (Cotta e Mikhailov, 1997), em mecânica dos fluidos (Cotta, 1993), mas não se tem o conhecimento de seu uso na solução da equação de Fokker-Planck.

Os métodos espectrais (Mikhailov, 1984; Vilhena, 1994) constituem uma larga classe de métodos computacionais para a aproximação numérica de soluções de um amplo número de problemas matemáticos, incluindo equações diferenciais ordinárias e parciais, problemas de au-

tovalores, equações integrais e cálculo variacional. A característica básica do método espectral consiste na expansão da solução em duas diferentes bases, onde a primeira é constituída de um número finito de funções globais ortogonais e suaves, e a segunda é formada pela base de Lagrange em um conjunto discreto de pontos do domínio – normalmente raízes do esquema de quadratura de Gauss.

O método espectral tem sido largamente usado para encontrar solução para problemas multidimensionais de transporte de partículas neutras com geometria cartesiana, como o problema unidimensional dependente do tempo (Ganapol, 1978; Oliveira, 2002), o problema tri-dimensional de transporte de partículas neutras (Vilhena, 1999). Entretanto, será inovador seu uso na solução analítica da equação de Fokker-Planck.

A aplicação do Método Espectral permite, em princípio, obter uma solução do problema para todas as variáveis independentes (Vilhena, 1999). E considera-se, também importante, do ponto de vista matemático, a análise do comportamento da solução encontrada, ou seja, a convergência dever ser analisada. É possível mostrar a convergência da solução definida para a variável espacial (Pazos e Vilhena, 1999) e para a aproximação dos harmônicos esféricos, que já foi mostrada por Segatto e Vilhena em 2000 usando isomorfismos entre dois espaços funcionais e o teorema de C_0 - semigrupos (Goldstein, 1985).

Dando continuidade ao objetivo de perseguir a solução analítica para aproximações da equação de transporte, pretende-se resolver a equação de Fokker-Planck dependente da energia, combinando o Método Espectral e LTP_N (Streck, 1993) (expansão em polinômios de Legendre + método genérico proposto por Vilhena). A principal idéia do método proposto consiste na expansão do fluxo angular na variável de energia em série de Fourier, no cálculo de momentos e na solução do sistema de equações diferenciais resultantes pela versão LTP_N do método genérico. Resulta deste procedimento uma solução analítica para o fluxo angular, uma vez que apenas uma aproximação é feita na derivação da formulação. Não se tem conhecimento dessa metodologia na solução da equação de Fokker-Planck.

Pretende-se construir uma solução válida para a equação de Fokker-Planck com dependência da energia (Komarov, 1997) para frente e para trás, as quais tem importante aplicação na implantação iônica com alta e baixa transferência de energia.

Solução analítica da equação de Fokker-Planck dependente da energia

Considera-se a equação de Fokker-Planck para frente,

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x} = D(E) \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial u}{\partial \mu} \right] + \frac{\partial}{\partial E} S(E)u + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial E^2} Q(E)u \quad (1)$$

u é o fluxo angular, E é a energia do íon, $E \in [E_c, E_0]$, E_c é a energia considerada quando os íons estão parados, E_0 é a energia inicial do incidente, x é a direção do movimento, $\mu = \cos \theta$, θ é o ângulo de espalhamento, $D(E)$ é o coeficiente de transferência de momento, $S(E)$ é o poder de freamento total e $Q(E)$ é o “stragglng” (dispersão) nuclear.

A equação (1) está sujeita às seguintes condições de contorno:

$$u(0, E, \mu) = f(E, \mu) = \delta(E - E_0) \frac{\delta(\mu - \mu_0)}{\mu_0}, \quad \mu > 0 \quad (2)$$

$$u(H, E, \mu) = 0, \quad \mu < 0 \quad (3)$$

$$Q(E) \frac{d}{dx} u(x, E_c, \mu) = 0 \quad (4)$$

$$u(x, E_0, \mu) = 0 \quad (5)$$

em que μ_0 é o valor médio do cosseno do ângulo diretor, H é a largura da placa e δ é o delta de Dirac.

É importante salientar que, os coeficientes $D(E)$, $S(E)$ e $Q(E)$ foram considerados todos constantes. Para o caso de coeficientes variáveis com a energia, usa-se aproximações "stepwise" para estes coeficientes. A partir deste ponto tais coeficientes serão chamados de D, S e Q respectivamente.

Com a finalidade de aplicar o método espectral na variável energia resolve-se o problema de Sturm Liouville associado à equação (1), descrito por,

$$\frac{d^2 u(E)}{dx^2} + \lambda^2 u(E) = 0$$

$$\left. \frac{d}{dx} u(E) \right|_{E=E_c} = 0 \quad (6)$$

$$u(E)|_{x=x_0} = 0$$

cujos autovetores associados aos autovalores λ_n são:

$$u^n(E) = \cos \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) \pi \left(\frac{E - E_c}{E_0 - E_c} \right) \right] \quad (7)$$

Tais autovetores são ortogonais no intervalo $[E_c, E_0]$ com relação a função peso $w(E)=1$, ou seja:

$$\int_{E_c}^{E_0} u^n(E) u^k(E) dx = \frac{E_0 - E_c}{2} \delta_{nk}, \quad n = k \quad (8)$$

$$\int_{E_c}^{E_0} u^n(E) u^k(E) dx = 0, \quad n \neq k \quad (9)$$

Com o propósito de eliminar a dependência na energia da equação (1), usando o problema de Sturm Liouville (6), expande-se a função $u(x, E, \mu)$ em série de Fourier truncada na variável E , como:

$$u(x, E, \mu) = \sum_{m=1}^M \alpha^m(x, \mu) \cos[w_m(E - E_c)] \quad , \text{ em que } w_m = \frac{(2m-1)\pi}{(E_0 - E_c)} \quad (10)$$

α^m coeficiente da série de Fourier, M é a ordem de truncamento da aproximação.

Assim substituindo (10) na equação (1), reescreve-se:

$$\begin{aligned} \mu \sum_{n=1}^M \frac{\partial}{\partial x} a^n(x, \mu) \cos[w_n(E - E_c)] &= D \sum_{n=1}^M \frac{\partial}{\partial \mu} [(1 - \mu^2) a^n(x, \mu) \cos[w_n(E - E_c)]] \\ &\quad - S \frac{(2m-1)\pi}{2(E_0 - E_c)} \sum_{n=1}^M a^n(x, \mu) \operatorname{sen}[w_n(E - E_c)] \\ &\quad - \frac{Q}{2} \left(\frac{(2m-1)\pi}{2(E_0 - E_c)} \right)^2 \sum_{n=1}^M a^n(x, \mu) \cos[w_n(E - E_c)] \end{aligned} \quad (11)$$

com as condições de contorno,

$$\sum_{n=1}^M a^n(0, \mu) \cos[w_n(E - E_c)] = \delta(E - E_0) \frac{\delta(\mu - \mu_0)}{\mu_0}, \quad \mu > 0 \quad (12)$$

$$\sum_{n=1}^M a^n(H, \mu) \cos[w_n(E - E_c)] = 0, \quad \mu < 0 \quad (13)$$

Agora, multiplicando-se a equação (11) por $\cos[w_k(E - E_c)]$ com $k=1,2,\dots,M$, integrando sobre o intervalo $[E_c, E_0]$ e usando a ortogonalidade tem-se:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} a^k(x, \mu) = D \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} a^k(x, \mu) \right] - S \frac{w}{2} \sum_{n=1}^M a^n(x, \mu) F_{n,k} - \frac{Q}{2} \frac{w^2}{4} a^k(x, \mu) \quad (14)$$

e suas condições de contorno ao serem multiplicadas por $\operatorname{sen}[w_k(E - E_c)]$ com $k=1,2,\dots,M$, e integradas sobre o intervalo $[E_c, E_0]$, tomam a forma:

$$\sum_{n=1}^M a^n(0, \mu) F_{n,k} = (-1)^{k-1} \frac{\delta(\mu - \mu_0)}{\mu_0}, \quad \mu > 0 \quad (15)$$

$$\sum_{n=1}^M a^n(H, \mu) F_{n,k} = 0, \quad \mu < 0 \quad (16)$$

onde,

$$F_{n,k} = \int_{E_c}^{E_0} \operatorname{sen}[w_n(E - E_c)] \cos[w_k(E - E_c)] dE = \begin{cases} \frac{E_0 - E_c}{(m+k-1)\pi}, & \text{se } m \text{ e } k \text{ tem mesma paridade} \\ \frac{E_0 - E_c}{(m-k)\pi}, & \text{se } m \text{ e } k \text{ tem paridades distintas} \end{cases} \quad (17)$$

Expandido $a^k(x, \mu)$ em uma série truncada de polinômios de Legendre de ordem N , da forma:

$$a^k(x, \mu) = \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} b_n^k(x) P_n(\mu) \quad (\text{distintas } 8) \quad (18)$$

com b_n^k coeficientes da série e N ordem da série. Ao substituir-se (18) na equação (14), (15) e (16) obtém-se:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} b_n^k(x) P_n(\mu) &= D \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} b_n^k(x) P_n(\mu) \right] \\ &\quad - S \frac{w_k}{2} \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} b_n^k(x) P_n(\mu) F_{m,k} \\ &\quad - \frac{Q}{2} \frac{w_k^2}{4} \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} b_n^k(x) P_n(\mu) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} b_n^k(0) P_n(\mu) F_{m,k} = (-1)^{k-1} \frac{\delta(\mu - \mu_0)}{\mu_0}, \quad \mu > 0 \quad (20)$$

$$\sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} b_n^k(H) P_n(\mu) F_{m,k} = \overset{n=0}{\sim}, \quad \mu < 0 \quad (21)$$

Aplicando no problema acima o operador $\int_{-1}^1 \delta P_l(\mu) d\mu$, $l = 0 \dots N$, e usando as propriedades dos polinômios de Legendre:

$$\int_{-1}^1 P_l(\mu) P_n(\mu) d\mu = \frac{2}{2l+1} \delta_{l,n} \quad (22)$$

$$\int_{-1}^1 \mu P_l(\mu) P_n(\mu) d\mu = \frac{l+1}{2l+1} \frac{2}{2l+3} \delta_{l+1,n} + \frac{l}{2l+1} \frac{2}{2l-1} \delta_{l-1,n} \quad (23)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1-\mu^2) \frac{d}{d\mu} P_l(\mu) P_n(\mu) \right) d\mu = -\frac{2n(n+1)}{2n+1} \delta_{l,n} \quad (24)$$

$$\frac{n+1}{2n+1} b_{n+1}^m(x) + \frac{n}{2n+1} b_{n-1}^m(x) + R_n^m b_n^m(x) + \sum_{k=1}^M \beta_k^m b_n^k(x) = 0 \quad (25)$$

e suas condições de contorno ficam:

$$\sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} b_n^k(0) \int_0^1 P_l(\mu) P_n(\mu) F_{m,k} = \frac{(-1)^{k-1}}{\mu_0} P_n(\mu_0), \quad \mu > 0 \quad (26)$$

$$\sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} b_n^k(H) \int_0^1 P_n(\mu) P_n(\mu) F_{m,k} = 0, \quad \mu < 0 \quad (27)$$

onde denotou-se por ponto a derivada em relação a x, isto é, $\dot{f} = df/dx$;

$$R_0^m = \left(S \frac{w_m}{2} F_{m,m} + n(n+1)D + \frac{Q}{2} \frac{w_m^2}{4} \right) \beta_0^m = S \frac{w_m}{2} F_{k,m}$$

Escrevendo (25) de forma matricial,

$$A \frac{d}{dx} b(x) + B(x) = 0 \quad (28)$$

em que a matriz A é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} Dig_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Dig_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Dig_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Dig_M \end{pmatrix}_{M(N+1)} \quad (29)$$

0 é a matriz nula de ordem N+1 e Dig é matriz também de ordem N+1 com a forma:

$$Dig = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{3}{3} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{N}{2(N+1)} & 0 \end{pmatrix}_{(N+1)} \quad (30)$$

e a matriz B é descrita por,

$$B = \begin{pmatrix} R^1 & \beta^{1,2} & \dots & \beta^{1,M} \\ \beta^{2,1} & R^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta^{M-1,M} \\ \beta^{M,1} & \dots & \beta^{M,M-1} & R^M \end{pmatrix}_{M(N+1)} \quad (31)$$

em que R^k e $\beta^{i,j}$ são as matrizes diagonais de ordem M

$$R^k = \begin{pmatrix} R_0^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_1^k & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_N^k \end{pmatrix} \text{ e } \beta^{i,j} = \begin{pmatrix} \beta_j^i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_j^i & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \beta_j^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_j^i \end{pmatrix} \quad (32)$$

e finalmente o vetor $b(x)$ é descrito por:

$$[b_0^1(x) \ b_1^1(x), \dots, b_N^1(x) \ b_0^2(x) \ b_1^2(x), \dots, b_N^2(x), \dots, b_0^M(x) \ b_1^M(x), \dots, b_N^M(x)]^T \quad (33)$$

Uma vez conhecido o vetor $b(x)$ a solução analítica para o fluxo angular de íons obtida através da combinação do Método Espectral e a aproximação P_N fica completamente determinada como segue:

$$u(x, E, \mu) = \sum_{m=1}^M \left(\sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} b_n^m(x) P_n(\mu) \right) \cos[w_m(E - E_c)] \quad \text{com} \quad w_m = \frac{(2m-1)\pi}{(E_0 - E_c)} \quad (34)$$

Através desta formulação, calcula-se a distribuição de energia depositada no sistema nuclear do alvo $w_n(x)$ e a distribuição de energia depositada no sistema eletrônico do alvo $w_e(x)$ que são calculadas pelas das integrais,

$$w_n(x) = \int_{E_c}^{E_0} S_n(E) \int_{-1}^1 u(x, E, \mu) d\mu dE \quad (35)$$

$$w_e(x) = \int_{E_c}^{E_0} S_e(E) \int_{-1}^1 u(x, E, \mu) d\mu dE \quad (36)$$

em que $S_n(E)$ e $S_e(E)$ são respectivamente o poder de freamento nuclear e o poder de freamento eletrônico.

Utilizando a mesma formulação da solução analítica de (1), pode-se expandir o método para a equação de Fokker Planck para trás:

$$-\mu \frac{\partial u}{\partial x} = D(E) \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial u}{\partial \mu} \right] + S(E) \frac{\partial u}{\partial E} - \frac{1}{2} Q(E) \frac{\partial^2 u}{\partial E^2} \quad (37)$$

Evidentemente as matrizes geradas sofrerão algumas modificações no sinal de seus parâmetros, mas não em sua forma ou ordem.

Deve-se observar que a equação matricial a ser resolvida (28) possui ordem $M(N+1)$. Durante algum tempo tentou-se desacoplar este problema em outros de ordem menor. Foram então usadas outras expansões de energia. Uma das muitas tentativas foi a expansão em uma série de Fourier em senos e cossenos de período completo. Assim, com este tipo de expansão conseguiu-se reduzir o problema matricial de ordem $M(N+1)$ a $N+1$ problemas de ordem M . Mas este tipo de expansão, apesar de satisfazer a equação não consegue satisfazer as condições de contorno, e voltou-se à formulação inicialmente proposta.

Resultados da formulação

Para comprovar que a solução analítica obtida (34) é válida, solucionou-se o problema dado pela equação (28), utilizando-se o software MAPLE VI.

Os dados físicos utilizados (Lima, 1999) foram: $E_0=100\text{KeV}$, $E_c=0.001\text{KeV}$, $D=0.1\text{\AA}^{-1}$,

$Q=0.357630633\text{KeV}^2/\text{\AA}$, $S_n=0.072241\text{KeV}/\text{\AA}$ e $S_e=0.051960\text{KeV}/\text{\AA}$. Os valores para a componente espacial do fluxo angular, foram tomados em pontos distribuídos no domínio $0 < x < 700\text{\AA}$, levando-se em conta a direção $\mu=0.5$. A ordem de aproximação foi para $M=2$ e $N=1$, uma vez que o software utilizado não é apropriado para cálculos em grandes escalas.

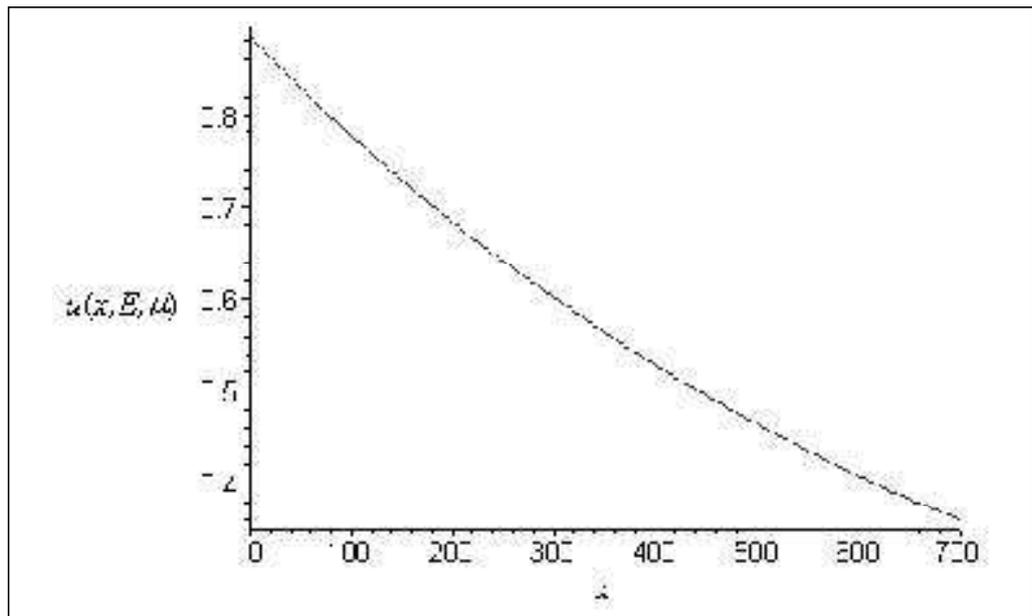


Figura 1

É importante salientar que a solução tem um decaimento exponencial, o que demonstra um comportamento esperado.

Conclusão

Atingiu-se o objetivo de encontrar uma solução analítica para a Equação de Fokker-Planck com dependência da energia. Tal solução tem um comportamento viável, uma vez que possui realmente um comportamento exponencial.

Pretende-se continuar o estudo do comportamento de tal solução, implementando-se computacionalmente, utilizando-se mais termos na aproximação em Série de Fourier e no LTPn, o que dará uma solução mais precisa. Se fará a comparação com dados experimentais que serão fornecidos pelo Instituto de Física – UFRGS. Na impossibilidade de se obter tal experimento se utilizará dados presentes na literatura, validando a solução através do estudo matemático de estimativa de erro e convergência, utilizando a idéia de Pazos e Vilhena em 1999, aplicada a um problema de transporte unidimensional dependente do tempo.

Referências Bibliográficas

ALTIMIROV, M.Y. et al. **Applied integral transforms**, 1993. CRM Monograph Series, v. 2. American Mathematical Society.

BIERSACK, J.P. Nuclear Instruments and Methods, *Physics Research B* 35, p. 205, 1988.

COTTA, R. M.; MIKHAILOV, M. D. **Heat conduction: Lumped analysis, integral transforms symbolic computations**. Europe Wiley: Interscience, 1997.

COTTA, R. M. **Integral transforms in computational heat and fluid flow**. CRC Press, Boca Raton, FL 1993.

COWERN, N.E.B.; BIRSACK, J.P. Nuclear Instruments and Methods *Physics Research B* 205, p 347, 1983.

COWERN, N.E.B. Nuclear Instruments and Methods *Physics Research B* 194 p 101, 1982.

DEBNATH, L. **Integral transforms and their applications**, CRC Press, 1995.

DUDERSTADT, J. J. **Transport theory**. New York, John Wiley and Sons, 1973.

GANAPOL, B.D. Solution of the time-dependent monoenergetic neutron transport equation in semi-infinite medium. **Transport Theory and Statistical Physics**, 7, p 103-122, 1978.

GOLDSTEIN, J. **Semi-groups of linear operators and applications**. New York, Oxford University Press, 1985.

GONÇALVES, G.A.; SEGATTO, C. F.; VILHENA, M. T. The LTS_N particular solution in a slab for any arbitrary source and large quadrature. **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, in press.

KOMAROV, F.F. Distribution of implanted impurities and deposited energy in high-energy ion implantation. Nuclear Instruments and Methods *Physics Research B* 124 p 478-483, 1997.

LIMA, D.R. **Solução da equação de Fokker-Planck pela combinação do método espectral e a transformada de Laplace**, Dissertação de mestrado em engenharia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS, Porto Alegre, 1999.

MIKHAILOV, M. D.; OZISIK, M.N. **Unified analysis and solutions of heat and mass diffusion**. New York, John Wiley, 1984.

MOZOLEVSKI, I. E.; BELKO, V.I. High energy ion implantation simulation based on numerical solution of the Boltzmann transport equation. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research B* 95p 17-24, 1995.

MOZOLEVSKI, I.E.; GRANDE, P.L. On the use of the backward and Fokker-Planck Equation to calculate range profiles. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research B* 170 p 45-52, 2000.

MOZOLEVSKI, I.E. Mathematical model and numerical methods for Fokker-Planck equation, 1997 (comunicação privada).

MOZOLEVSKI, I.E. P_N Approximation method for backward Fokker-Planck equation, 1997. (comunicação privada).

MOZOLEVSKI, I.E. High energy ion range and deposited energy calculation using the Boltzmann-Fokker-Planck splitting of the Boltzmann transport equation. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research B* 175-177 p 113-118, 2001.

OLIVEIRA, J.V.P.; CARDONA, A.; VILHENA, M.T. Solution of the one-dimensional time-dependent discrete ordinates problem in a slab by the spectral and LTS_N methods. *Annals of Nuclear Energy* 29 p 13-20, 2002.

PAZOS, R.P.; VILHENA, M.T. Convergence of LTS_N method: Approach of C_0 semi-groups. *Progress in Nuclear Energy* 34 p 77-86, 1998.

PAZOS, R.P.; VILHENA, M.T. Convergence in transport theory. *Applied Num. Math.* 30 p 79, 1999.

RISKEN, H. **The Fokker-Planck equation**, Berlin. Springer, 1996.

SEGATTO, C.F.; VILHENA, M.T. On the convergence of the spherical harmonics approximations. *Nuclear Science and Engineering* 134 p 114-119, 2000.

SEGATTO, C.F.; VILHENA, M.T.; GOMES, M.G. The one-dimensional LTS_N solution in a slab with high degree of quadrature. *Annals of Nuclear Energy* 26 (10) p 925-934, 1999.

SOIZE, C. The Fokker-Planck equation for stochastic dynamical systems and its explicit steady state solutions. *World Scientific Publishing*, USA, 1994.

STRECK, E.E.; VILHENA, M. T. An Approximated analytical solution for the one-groups slab geometry neutron transport equation. *Kerntechnik* 57 (3), 1992.

STRECK, E.E. **Solução analítica para a aproximação P_N da equação unidimensional de transporte**, Tese de Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS, Porto Alegre, 1993.

VILHENA, M.T. Fundamentos do método espectral. **Anais do XVI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional**, Vitória – ES, 1994.

VILHENA, M.T. et. al. Solutions to the multidimensional linear transport equation by the spectral method **Progress in Nuclear Energy** 35 p 275-291, 1999.

WIO, H. **An introduction to stochastic processes and nonequilibrium statistical physics**. World Scientific Publishing USA, 1994.

ZIEGLER, J.E.; BIRSACK, J.; LITTMARK, J. **The stopping power and range of ions in solids**. Pergamon, New York, 1985.